MATHÉMATIQUES

GROUPE B (P')

Notations et hypothèses.

On notera E l'espace vectoriel hermitien obtenu en munissant $\mathbb{C}^n$ du produit hermitien

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \bar{\eta}_i$$

où ξ_i et η_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ sont les composantes de x et y dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{C}^n$.

La norme de x sera notée $\| x \|$: $\| x \|^2 = (x, x)$.

On désignera par la même lettre (par exemple A) un élément de l'algèbre $\mathfrak{L}(E)$ des endomorphismes de E et sa matrice dans $\mathcal{B}$, élément de l'algèbre $\mathfrak{M}_n$ des matrices carrées d'ordre n, à coefficients dans $\mathbb{C}$. Le terme général de la matrice A sera noté a_{ij}.

L'image par A d'un élément x de E sera notée Ax.

On désignera aussi par la même notation, A*, l'endomorphisme adjoint de A, tel que $(Ax, y) = (x, A^*y)$ pour tout x et tout y de E, et sa matrice dans $\mathcal{B}$, dont le terme général est $\bar{a}_{ji}$. Un endomorphisme A est dit *hermitien* si $A^* = A$.

L'endomorphisme identique sera noté I et on posera $A^m = I$ pour $m = 0$.

Si les valeurs propres de l'endomorphisme A sont les nombres complexes $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant q}$, on posera $\rho(A) = \max_{1 \leqslant i \leqslant q} |\lambda_i|$.

On admettra le résultat suivant :

(R) **Pour toute matrice A de $\mathfrak{M}_n$, il existe une matrice $\tilde{A}$, semblable à A ($A = S^{-1} \tilde{A} S$), telle que**

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \boxed{J_1} & & & 0 \\ & \boxed{J_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{J_q} \end{pmatrix}$$

où les J_i $(1 \leqslant i \leqslant q)$ sont des matrices carrées de la forme

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix} \qquad \lambda_i \in \mathbb{C} ;$$

si l'on note r_i l'ordre de la matrice J_i, on a donc

$$1 \leqslant r_i \leqslant n \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant q \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{q} r_i = n.$$

La matrice $\tilde{A}$ est une *forme de Jordan* de A.

I. Première partie

Pour $A \in \mathfrak{L}(E)$, on pose $\| A \| = \sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \frac{\| Ax \|}{\| x \|}$.

1° Vérifier rapidement que l'application $A \longmapsto \| A \|$ de $\mathfrak{L}(E)$ dans $\mathbb{R}$ est une norme sur $\mathfrak{L}(E)$ et que, pour $x \in E$, $A \in \mathfrak{L}(E)$, $B \in \mathfrak{L}(E)$ on a

$$\| Ax \| \leqslant \| A \| \cdot \| x \| \quad \text{et} \quad \| AB \| \leqslant \| A \| \cdot \| B \|.$$

Si $t \longmapsto A(t)$ est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathfrak{L}(E)$, on dit que $A(t)$ *tend vers* B lorsque t tend vers t_0 (et on note $\lim_{t \to t_0} A(t) = B$) si

$$\lim_{t \to t_0} a_{ij}(t) = b_{ij} \quad 1 \leqslant i \leqslant n, \quad 1 \leqslant j \leqslant n.$$

Montrer que cette définition est équivalente à

$$\lim_{t \to t_0} \| A(t) - B \| = 0.$$

2° Montrer que $\rho(A) \leqslant \| A \|$ et que $\| A \| = [\rho(A^*A)]^{1/2}$.

Pour démontrer ce dernier résultat, on montrera tout d'abord que l'endomorphisme A*A a toutes ses valeurs propres réelles et non négatives et on utilisera une base de $\mathbb{C}^n$ formée de vecteurs propres de A*A.

.../...

3° Si A est hermitien, et si m est un entier positif, donner l'expression de $\| A^m \|$ en fonction de $\rho(A)$.

4° Soit M l'endomorphisme défini par la matrice de $\mathfrak{M}_2$:

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \qquad a \in \mathbb{R}, \qquad b \in \mathbb{R}, \qquad a \neq 0, \qquad b \neq 0.$$

Comparer $\rho(M)$ et $\| M \|$. Calculer M^m puis $\| M^m \|$ en fonction de a et b; en déduire que la relation établie dans la question précédente n'est pas vraie pour tous les éléments de $\mathcal{L}(E)$.

II. Deuxième partie

On se propose d'étudier le comportement de $\| A^m \|$ lorsque m tend vers l'infini. On utilisera pour cela une forme de Jordan de A.

1° Soit J une matrice carrée d'ordre p $(p \geqslant 1)$, de la forme

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \qquad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Pour $m \in \mathbb{N}$, calculer J^m.

Pour $m \geqslant p - 1$ et $\lambda \neq 0$, on définit la matrice K_m par la relation

$$J^m = C_m^{p-1} \lambda^{m-p+1} K_m .$$

Étudier le comportement, quand m tend vers l'infini, des termes de la matrice K_m.

En déduire que $\| J^m \|$ est équivalent, quand m tend vers l'infini, à

$$C_m^{p-1} \, | \lambda |^{m-p+1}.$$

2° Soient A une matrice de $\mathfrak{M}_n$ et $\tilde{A}$ la forme de Jordan définie dans $(\mathcal{R})$. Soit L l'ensemble des entiers l tels que $1 \leqslant l \leqslant q$ et que $\rho(J_l) = \rho(A)$.

On pose $p = \max\limits_{l \in L} r_l$, et on suppose $\rho(A) \neq 0$.

Pour $m \geqslant p - 1$, on définit la matrice $N_m = \dfrac{\tilde{A}^m}{C_m^{p-1} [\rho(A)]^{m-p+1}}$.

Montrer que tous les termes de la matrice N_m sont bornés lorsque m tend vers l'infini et que toute suite partielle convergente extraite de la suite (N_m) a pour limite une matrice N dont les termes non nuls sont de module 1; on précisera l'emplacement des termes non nuls.

Indiquer un cas particulier où N est déterminée de façon unique; un autre cas particulier où $\mu = \| S^{-1} N S \|$ est déterminé de façon unique sans que N le soit.

3° Soit $\Sigma = \| S^{-1} \| \, . \, \| S \|$

Montrer que $\Sigma \geqslant 1$ et que $\dfrac{1}{\Sigma} \leqslant \| S^{-1} N S \| \leqslant \Sigma$.

Quelle conclusion peut-on en tirer pour le comportement, quand m tend vers l'infini, de $\| S^{-1} N_m S \|$, puis de $\| A^m \|$?

4° Pour la matrice M définie en I.4°, déduire de ce qui précède, un équivalent pour $\| M^m \|$ lorsque m tend vers l'infini. Retrouver cet équivalent à partir des résultats de I.4°.

III. Troisième partie

Soient a et x_0 deux éléments de E et A un endomorphisme de E. On se propose d'étudier la convergence de la suite (x_m) d'éléments de E définie par

$$(1) \qquad x_m = A x_{m-1} + a \qquad m \geqslant 1.$$

1° Montrer que la condition $\rho(A) < 1$ est suffisante pour que $\lim\limits_{m \to \infty} x_m$ existe et soit indépendante de x_0.

Dorénavant on supposera $0 < \rho(A) = \rho < 1$, et on posera

$$x = \lim_{m \to \infty} x_m \quad \text{et} \quad \varepsilon_m = x - x_m \quad (m \geqslant 0).$$

2° On pose

$$\begin{cases} R_m(A) = -\dfrac{1}{m} \log \| A^m \| & m \in \mathbb{N}, \quad m \geqslant 1. \\ R_\infty(A) = -\log \rho. \end{cases}$$

Montrer que $\lim\limits_{m \to \infty} R_m(A) = R_\infty(A)$.

$R_m(A)$ et $R_\infty(A)$ sont appelés respectivement « vitesse moyenne de convergence sur m itérations » et « vitesse asymptotique de convergence » de la suite (x_m). Justifier ces termes.

Après avoir démontré l'inégalité

$$\| A^{m\alpha+\beta} \| \leqslant \| A^m \|^\alpha \| A \|^\beta \qquad \alpha,\ \beta,\ m \in \mathbb{N},$$

montrer que $R_m(A) \leqslant R_\infty(A)$.

Traiter le cas où A est hermitien.

3° On se propose de construire, à partir de A, a, x_0, une suite (z_m) qui converge vers x « plus vite » que la suite (x_m). Pour cela on pose

$$(2) \qquad z_m = \sum_{j=0}^{m} \alpha_j(m)\, x_j \qquad m \geqslant 0,$$

où les $\alpha_j(m)$ sont des constantes réelles et les x_j sont définis par (1).

Soit p_m le polynôme défini par $p_m(X) = \sum_{j=0}^{m} \alpha_j(m)\, X^j$.

On veut que, si $x_0 = x \neq 0$, on ait $z_m = x$ pour tout m; montrer que l'on doit alors avoir, entre les constantes $\alpha_j(m)$, la relation

$$\sum_{j=0}^{m} \alpha_j(m) = p_m(1) = 1.$$

On désignera par $\mathfrak{P}_m$ l'ensemble des polynômes π à coefficients réels, de degré m et tels que $\pi(1) = 1$; on supposera désormais $p_m \in \mathfrak{P}_m$ pour tout m positif.

Soit $\eta_m = x - z_m$; donner une majoration de $\| \eta_m \|$ en fonction de $\eta_0 (= \varepsilon_0)$ et de $\| p_m(A) \|$.

4° *On suppose désormais* A *hermitien.* Montrer que $\| p_m(A) \| = \rho(p_m(A))$ et que $\| p_m(A) \| \leqslant \max_{-\rho \leqslant t \leqslant \rho} | p_m(t) |$.

5° Montrer que, pour tout m entier non négatif, la relation

$$q_m(t) = \begin{cases} \cos(m \operatorname{Arc\,cos} t) & -1 \leqslant t \leqslant 1 \\ \operatorname{ch}(m \operatorname{Arg\,ch} t) & 1 \leqslant t \end{cases}$$

définit un polynôme de $\mathfrak{P}_m$.

Soit $\tilde{q}_m$ le polynôme de $\mathfrak{P}_m$ défini par $\tilde{q}_m(t) = \dfrac{q_m\left(\frac{t}{\rho}\right)}{q_m\left(\frac{1}{\rho}\right)}$.

En supposant qu'il existe un polynôme π de $\mathfrak{P}_m$ tel que

$$\max_{-\rho \leqslant t \leqslant \rho} | \tilde{q}_m(t) | > \max_{-\rho \leqslant t \leqslant \rho} | \pi(t) |,$$

rechercher le nombre des racines du polynôme $r = \pi - \tilde{q}_m$.

En déduire que le polynôme $\tilde{q}_m$ est tel que

$$\max_{-\rho \leqslant t \leqslant \rho} | \tilde{q}_m(t) | = \inf_{\pi \in \mathfrak{P}_m} \max_{-\rho \leqslant t \leqslant \rho} | \pi(t) |.$$

Est-il seul à satisfaire cette relation?

6° Montrer que les polynômes q_m vérifient une relation de récurrence de la forme

$$q_{m+1}(t) = \alpha t\, q_m(t) + \beta\, q_{m-1}(t), \qquad m \geqslant 1,$$

et déterminer q_0 et q_1.

Dans la formule (2) on choisit pour constantes $\alpha_j(m)$ les coefficients du polynôme $\tilde{q}_m$; justifier ce choix.

Montrer que l'on a alors, entre les z_i, la relation

$$(3) \qquad \begin{cases} z_{m+1} = \sigma_{m+1}\{ A z_m + a - z_{m-1} \} + z_{m-1}, & m \geqslant 1 \\ z_0 = x_0, \qquad z_1 = A x_0 + a, \end{cases}$$

où σ_{m+1} s'exprime en fonction de ρ, $q_m\left(\frac{1}{\rho}\right)$ et $q_{m+1}\left(\frac{1}{\rho}\right)$.

7° On pose $\tilde{R}_m(A) = -\dfrac{1}{m} \log \| \tilde{q}_m(A) \|$.

$\tilde{R}_m(A)$ est la « vitesse moyenne de convergence sur m itérations » de la suite (z_m).

Calculer $\tilde{R}_m(A)$ et $\tilde{R}_\infty(A) = \lim_{m \to \infty} \tilde{R}_m(A)$ en fonction de ρ.

Comparer $\tilde{R}_\infty(A)$ et $R_\infty(A)$. Quelle conclusion peut-on en tirer?

-FIN-

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail